Zentrale Aufnahmeprüfung 2016 für die Kurzgymnasien des Kantons Zürich

Mathematik

Lösungen

Punkteverteilung:

Nr.:	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6	7	8	9	10	11a	11b	12a	12b	Total
Alg.:	2	2	2	2	1	2	3			2	3	4						1	1	25
Gm.:								1	2				3	3	3	1	2			15
P_{max}:	2	2	2	2	1	2	3	1	2	2	3	4	3	3	3	1	2	1	1	40

Insgesamt: 40 Punkte

Aufgabe 1a **$a + 3$** **2 P.**

Lösungsweg:

$$\frac{4a+8}{4}+\frac{2a}{6}-\frac{a-3}{3}=\frac{12a+24+4a-4a+12}{12}=\frac{12a+36}{12}=\frac{12(a+3)}{12}=a+3$$

oder

$$\frac{4a+8}{4}+\frac{2a}{6}-\frac{a-3}{3}=\frac{4(a+2)}{4}+\frac{2a}{6}-\frac{a}{3}+\frac{3}{3}=a+2+\frac{a}{3}-\frac{a}{3}+1=a+3$$

oder

$$\frac{4a+8}{4}+\frac{2a}{6}-\frac{a-3}{3}=\frac{4(a+2)}{4}+\frac{a}{3}-\frac{a-3}{3}=a+2+\frac{a}{3}-\frac{a-3}{3}=\frac{3a+6+a-a+3}{3}$$

$$=\frac{3a+9}{3}=a+3$$

Aufgabe 1b **$\frac{2}{3}$** **2 P.**

Lösungsweg:

$$\frac{\sqrt{(3a)^2+16a^2}}{2a^2}:\frac{15}{4a}=\frac{\sqrt{25a^2}}{2a^2}:\frac{15}{4a}=\frac{5a}{2a^2}:\frac{15}{4a}=\frac{5}{2a}\cdot\frac{4a}{15}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

oder

$$\frac{\sqrt{(3a)^2+16a^2}}{2a^2}:\frac{15}{4a}=\frac{\sqrt{(3a)^2+16a^2}}{2a^2}\cdot\frac{4a}{15}=\frac{\sqrt{(3a)^2+16a^2}}{a}\cdot\frac{2}{15}=\frac{\sqrt{25a^2}}{a}\cdot\frac{2}{15}$$

$$=\frac{5a}{a}\cdot\frac{2}{15}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Aufgabe 2a **$x = -7$** **2 P.**

Lösungsweg:

$$\begin{aligned} 7x-3(5x-16)&=104\\ 7x-15x+48&=104\\ -8x&=56\\ x&=-7 \end{aligned}$$

Aufgabe 2b $\boldsymbol{x = \frac{5}{6}}$ **2 P.**

Lösungsweg:

$$3 \cdot \left(x - \frac{5}{18}\right) = \frac{10x - 5}{2}$$

$$3x - \frac{5}{6} = \frac{10x - 5}{2}$$

$$\frac{18x}{6} - \frac{5}{6} = \frac{30x - 15}{6}$$

$$18x - 5 = 30x - 15$$

$$12x = 10$$

$$x = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Aufgabe 3a **17%** **1 P.**

Lösungsweg:

$$\frac{38\,025}{32\,500} = 1.17$$

$$(1.17 - 1) \cdot 100 = 17\,\%$$

Das Auto war ursprünglich 17 % teurer.

Aufgabe 3b **CHF 27 500** **2 P.**

Lösungsweg:

$x \cdot 1.32 \cdot 0.68 = 24\,684$ ⇔ $x = 27\,500$ CHF

oder

$24\,684 : \frac{68}{100} = 36\,300$ CHF Preis des Autos vor der Preisreduktion und nach der Preiserhöhung

$36\,300 : \frac{132}{100} = 27\,500$ CHF ursprünglicher Preis des Autos vor der Preiserhöhung

---

Aufgabe 4a **96 cm^3** **3 P.**

Lösungsweg:

$S_{Quader} = 2 \cdot (a \cdot 3a + 3a \cdot 4a + a \cdot 4a) = 38a^2 = 152 \text{ cm}^2$

$a = 2$ cm

$V_{Quader} = 4a \cdot 3a \cdot a = 12a^3$

für $a = 2$ cm folgt somit: $V_{Quader} = 8 \cdot 6 \cdot 2 = 96 \text{ cm}^3$

Aufgabe 4b **Das Volumen wird um den Faktor 8 vergrössert.** **1 P.**

Lösungsweg:

$$V = 12 \cdot (2a)^3 = 12 \cdot 8a^3 = 96a^3 \qquad \mid a = 2$$
$$= 96 \cdot 2^3 = 8 \cdot 96 = 768 \text{ cm}^3$$

Die Länge, die Breite und die Höhe werden jeweils verdoppelt. Das heisst, dass das Volumen um den Faktor 8 vergrössert wird.

Aufgabe 5a **P'($-x$ / $y - 3$)** **2 P.**

Lösungsweg:

Durch Spiegelung an der y-Achse entsteht der Punkt $P_1(-x / y)$.

Wird der Punkt $P_1(-x / y)$ nun noch um drei Einheiten nach unten verschoben, entsteht der Punkt $P'(-x / y - 3)$.

Aufgabe 5b $A_{Bilddreieck} = 6 \cdot A_{Originaldreieck}$ **2 P.**

Lösungsweg 1:

Die Abbildung, die die *x*-Koordinate von *x* auf $3x + 1$ abbildet, bewirkt, dass jede Länge in *x*-Richtung verdreifacht wird.

Die Abbildung, die die *y*-Koordinate von *y* auf $2y$ abbildet, bewirkt, dass jede Länge in *y*-Richtung verdoppelt wird.

Somit wird der Flächeninhalt des Bilddreiecks sechsmal vergrössert.
Es gilt somit: $A_{Bilddreieck} = 6 \cdot A_{Originaldreieck}$

Lösungsweg 2:

$$A_{Originaldreieck} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 = \frac{21}{2} = 10.5$$

Das neue Dreieck hat die Koordinaten (1 / –6), (10 / –6) und (7 / 8).

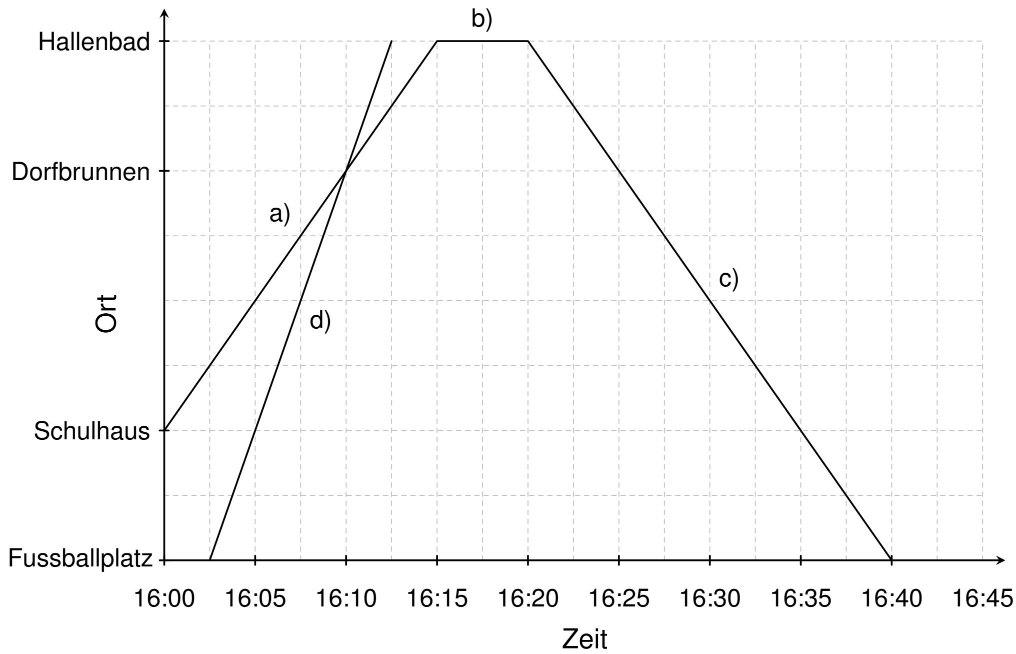
$$A_{Bilddreieck} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 14 = 63$$

63 : 10.5 = 6

Das Bilddreieck ist 6-mal grösser als das Originaldreieck.

Aufgabe 6 **3 P.**

Lösungsfigur:



Aufgabe 7 **14 g (Tüte) und 0.55 g (Legoteilchen)** **4 P.**

Lösungsweg:

	leere Tüte	Lego-teilchen	mit Legoteilchen gefüllte Tüte
Gewicht in g	x	$x - 13.45$	$x + 500 \cdot (x - 13.45)$ $= 501x - 6725$

Daraus ergibt sich die folgende Gleichung:

$$7(501x - 6725) = 2023$$

$$3507x - 47075 = 2023$$

$$3507x = 49098$$

$$x = 14$$

Eine leere Tüte wiegt 14 g, ein Legoteilchen wiegt 0.55 g.

oder

	leere Tüte	Lego-teilchen	mit Legoteilchen gefüllte Tüte
Gewicht in g	$x + 13.45$	x	$x + 13.45 + 500x$ $= 501x + 13.45$

Daraus ergibt sich die folgende Gleichung:

$$7 \cdot (x + 13.45 + 500x) = 2023$$

$$x + 13.45 + 500x = 289$$

$$501x = 275.55$$

$$x = 0.55$$

Eine leere Tüte wiegt 14 g, ein Legoteilchen wiegt 0.55 g.

Aufgabe 8 $\overline{AB} = 68\text{ cm}$, $\overline{AC} \approx 34.986\text{ cm}$, $\overline{BC} \approx 58.310\text{ cm}$ **3 P.**

Lösungsweg:

$$r = \overline{MC} = \sqrt{\overline{H_CM}^2 + \overline{H_CC}^2} = \sqrt{16^2 + 30^2} = \sqrt{256 + 900} = \sqrt{1156} = 34\text{ cm}$$

$$\overline{AH_C} = r - \overline{H_cM} = 34 - 16 = 18\text{ cm}$$

$$\overline{AB} = 2 \cdot r = 68\text{ cm}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH_C}^2 + \overline{H_CC}^2} = \sqrt{18^2 + 30^2} = \sqrt{324 + 900} = \sqrt{1224} \approx 34.986\text{ cm}$$

Ohne Benutzung des rechten Winkels bei C (Thaleskreis):

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{H_CB}^2 + \overline{H_CC}^2} = \sqrt{50^2 + 30^2} = \sqrt{2500 + 900} = \sqrt{3400} \approx 58.310\text{ cm}$$

Mit Benutzung des rechten Winkels bei C (Thaleskreis):

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{68^2 - 34.986^2} = \sqrt{4624 - 1224} = \sqrt{3400} \approx 58.310\text{ cm}$$

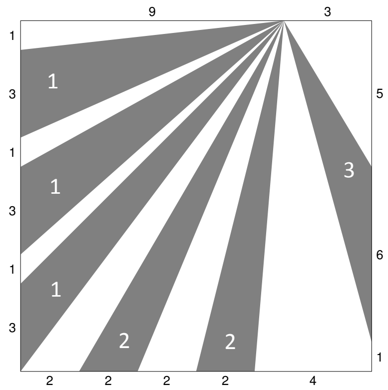
Mit Hilfe der Dreiecksfläche und mit Benutzung des rechten Winkels bei C:

$$\overline{H_cC} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{BC} = \frac{\overline{H_cC} \cdot \overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{30 \cdot 68}{34.986} = \sqrt{3400} \approx 58.310$$

Aufgabe 9 73.5 cm^2 **3 P.**

Lösungsweg:

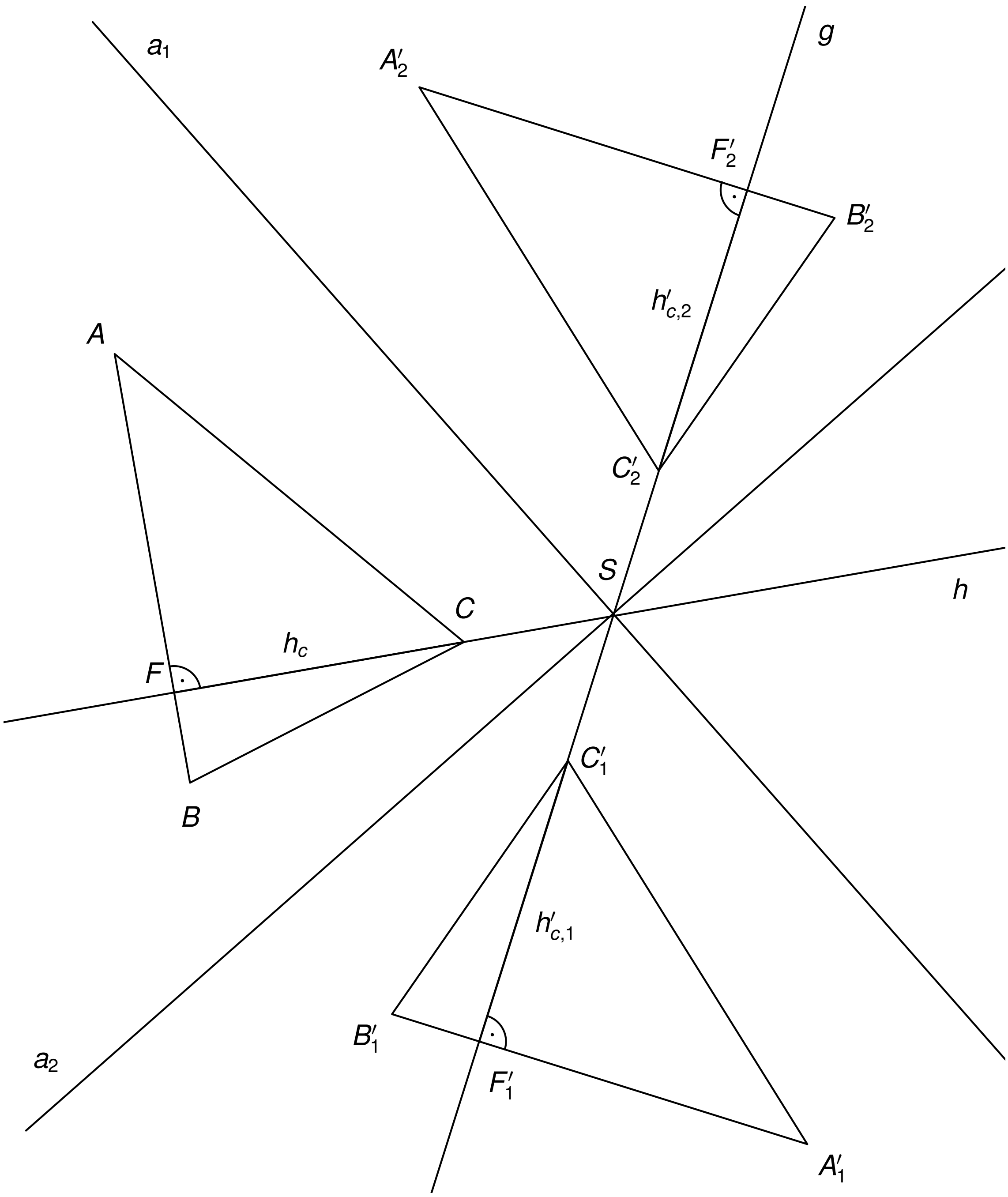


$$A = 3 \cdot A_{\triangle 1} + 2 \cdot A_{\triangle 2} + A_{\triangle 3}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 3 \cdot 13.5 + 2 \cdot 12 + 9 = 73.5\text{ cm}^2$$

Aufgabe 10 **3 P.**

Lösungsfigur:



Konstruktionsbericht:

1. Die Gerade *g(C, F)* wird mit *h* bezeichnet.
2. $h \cap g = \{S\}$
3. Winkelhalbierende a_1 und a_2 des $\angle(g, h)$ (= Spiegelachsen)
4. Spiegle das Dreieck *ABC* an a_1 ➔ Dreieck $A_1'B_1'C_1'$
5. Spiegle das Dreieck *ABC* an a_2 ➔ Dreieck $A_2'B_2'C_2'$

Aufgabe 11a $\boldsymbol{V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Würfel}}}$ **1 P.**

Lösungsweg:

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot G_{Würfel} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot V_{Würfel}$$

oder

$$V_{Würfel} = 9^3 = 729 \text{ cm}^3$$

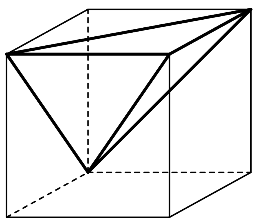
$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9^2 \cdot 9 = \frac{1}{6} \cdot 9^3 = 121.5 \text{ cm}^3 = \frac{1}{6} \cdot V_{Würfel}$$

Das Pyramidenvolumen beträgt $\frac{1}{6}$ des Würfelvolumens.

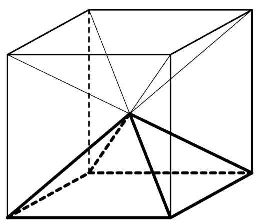
Aufgabe 11b **2 P.**

Lösung:

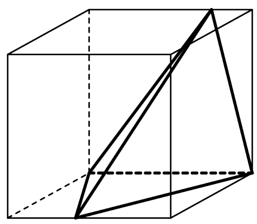
☒ ja ☐ nein



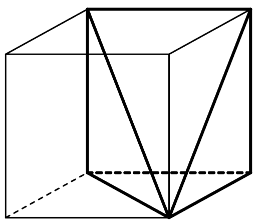
☒ ja ☐ nein



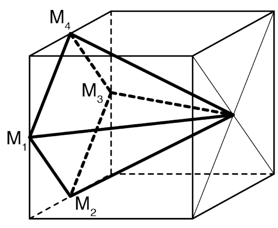
☒ ja ☐ nein



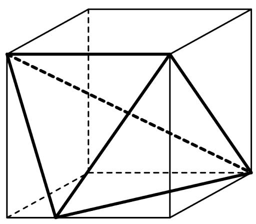
☐ ja ☒ nein



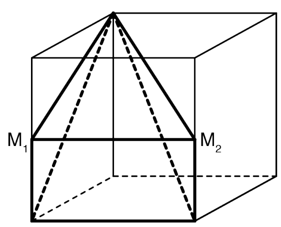
☒ ja ☐ nein



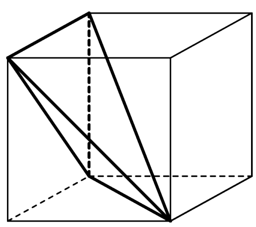
☒ ja ☐ nein



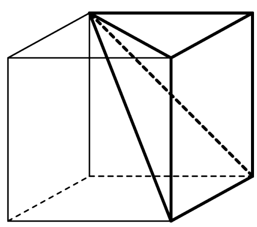
☒ ja ☐ nein



☒ ja ☐ nein

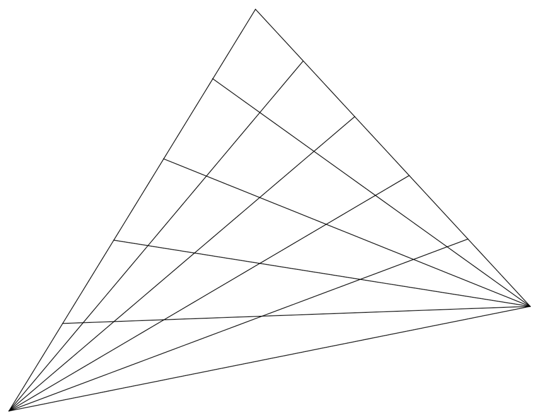


☐ ja ☒ nein



Aufgabe 12a **25 Flächen** **1 P.**

Lösungsskizze:



Aufgabe 12b $(n+1)\cdot(n+1)=(n+1)^2$ **Flächen** **1 P.**

Linien	Anzahl Teilstrecken pro Dreiecksseite	Anzahl Teilflächen
2	3	$3^2 = 9$
3	4	$4^2 = 16$
4	5	$5^2 = 25$
5	6	$6^2 = 36$
...	...	...
n	n + 1	$(n+1)\cdot(n+1)=(n+1)^2$